

NO. 13/LPPM/137/K/III/2014

KODE/NAMA RUMPUN ILMU:
MATEMATIKA

**LAPORAN
PENELITIAN FUNDAMENTAL OFFLINE**



**SIFAT SMALL REIMANN SUM PADA INTEGRAL HENSTOCK DI DALAM
RUANG METRIK KOMPAK LOKAL DARI FUNGSI BERNILAI VEKTOR**

OLEH:

**Dr. Manuharawati, M.Si.
Dwi Nur Yuniarti, S.Si., M.Sc**

**NIDN. 0018016103
NIDN. 0029068302**

**Dilaksanakan dengan Dana BOPTN
Berdasarkan Surat Keputusan Rektor Universitas Negeri Surabaya
Nomor: 137/UN38/HK/LT/2014 tanggal 22 April 2014**

**KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
LEMBAGA PENELITIAN DAN PENGABDIAN KEPADA MASYARAKAT
UNIVERSITAS NEGERI SURABAYA
TAHUN 2014**

**HALAMAN PENGESAHAN
PENELITIAN FUNDAMENTAL**

Judul Penelitian : Sifat *Small Riemann Sum* Pada Integral
Henstock Di Dalam Ruang Metrik Kompak
Lokal Dari Fungsi Bernilai Vektor.

Kode/ Nama Rumpun Ilmu : 121/ Matematika (MIPA)

Ketua Peneliti

- a. Nama lengkap : Dr. Manuharawati, M.Si.
- b. NIDN : 0018016103
- c. Jabatan Fungsional : Lektor Kepala
- d. Program Studi : Matematika
- e. Nomor HP : 0818468954
- f. Alamat surel (e-mail) : manuhara@yahoo.co.id

Anggota Peneliti

- a. Nama lengkap : Dwi Nur Yuniarti, S.Si, M.Sc
- b. NIDN : 0029068302
- c. Perguruan Tinggi : Universitas Negeri Surabaya

Penanggung Jawab : Dr. Manuharawati, M.Si.

Lama Penelitian Keseluruhan : satu (1) tahun

Tahun Pelaksanaan : Tahun ke satu (1) dari rencana satu (1)
tahun

Biaya Penelitian Keseluruhan : Rp52.500.000,00

Biaya Tahun Berjalan : - diusulkan ke DIKTI Rp52.500.000,00
- dana internal PT Rp0,00
- dana institusi lain Rp0,00

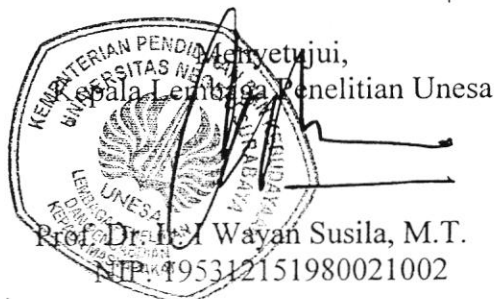
Mengetahui,
Dekan FMIPA Unesa



Prof. Dr. Suyono, M.Pd.,
NIP. 196006201985031003

Surabaya, 1 Desember 2014
Ketua Peneliti,

Dr. Manuharawati, M.Si
NIP. 196101181991032001



Mengetahui,
Kepala Lembaga Penelitian Unesa
Prof. Dr. I Wayan Susila, M.T.
NIP. 195312151980021002

**LAPORAN AKHIR
PENELITIAN FUNDAMENTAL**



**SIFAT *SMALL RIEMANN SUM* PADA INTEGRAL HENSTOCK DI
DALAM RUANG METRIK KOMPAK LOKAL DARI FUNGSI
BERNILAI VEKTOR**

Tahun ke satu dari Rencana satu tahun

TIM PENELITIAN

**Ketua: Dr. Manuharawati, M.Si.; NIDN: 0018016103
Anggota: Dwi Nur Yunianti, S.Si, M.Sc.; NIDN : 0029068302**

UNIVERSITAS NEGERI SURABAYA

Desember 2014

**HALAMAN PENGESAHAN
PENELITIAN FUNDAMENTAL**

Judul Penelitian	:Sifat <i>Small Riemann Sum</i> Pada Integral Henstock Di Dalam Ruang Metrik Kompak Lokal Dari Fungsi Bernilai Vektor.
Kode/ Nama Rumpun Ilmu	: 121/ Matematika (MIPA)
Ketua Peneliti	
a. Nama lengkap	: Dr. Manuharawati, M.Si.
b. NIDN	: 0018016103
c. Jabatan Fungsional	:Lektor Kepala
d. Program Studi	: Matematika
e. Nomor HP	: 0818468954
f. Alamat surel (e-mail)	:manuhara@yahoo.co.id
Anggota Peneliti	
a. Nama lengkap	: Dwi Nur Yunianti, S.Si, M.Sc
b. NIDN	: 0029068302
c. Perguruan Tinggi	:Universitas Negeri Surabaya
Penanggung Jawab	: Dr. Manuharawati, M.Si.
Lama Penelitian Keseluruhan	: satu (1) tahun
Tahun Pelaksanaan	: Tahun ke satu(1) dari rencana satu (1) tahun
Biaya Penelitian Keseluruhan	: Rp52.500.000,00
Biaya Tahun Berjalan	: - diusulkan ke DIKTI Rp52.500.000,00 - dana internal PT Rp0,00 - dana institusi lain Rp0,00

Mengetahui,
Kepala LPPM Unesa

Surabaya, Desember 2014
Ketua Peneliti,

Prof. Dr. Ir. I Wayan Susila, M.T.
NIP. 195312151980021002

Dr. Manuharawati, M.Si
NIP. 196101181991032001

RINGKASAN

Sampai saat ini sudah banyak ahli matematika yang mengembangkan teori integral, khususnya integral Henstock. Hal ini terbukti dari hasil penelitian tentang integral Henstock yang sudah dilakukan oleh Manuharawati (2002,2013), Manuharawati dan Yunianti (2013a), Indrati (2002), Henstock (1968), Lee dan Chew (1985, 1986), dan oleh Darmawijaya (1990, 2001). Dari integral Henstock untuk fungsi bernilai real telah dikaji juga tentang sifat *Small Riemann Sum*, yang antara lain dilakukan oleh Lee (1990), Lu dan Lee (1990 -1991), Schurle (1984), dan Darmawijaya (1995).

Berdasarkan hasil penelitian yang terkait dengan dua topik tersebut, yaitu sifat *Small Riemann Sum* untuk fungsi terintegral Henstock yang bernilai real dan, integral Henstock di dalam ruang metrik kompak lokal dari fungsi bernilai vektor, ada peluang untuk melakukan penelitian tentang sifat *Small Riemann Sum* pada terintegral Henstock di dalam ruang metrik kompak lokal dari fungsi bernilai vektor. Fungsi bernilai vektor dimaksudkan pada penelitian yang akan dilakukan adalah nilai fungsi dari fungsi terintegralnya adalah suatu vektor di ruang bernorma, khususnya ruang Banach. Oleh karena itu sifat *Small Riemann Sum* yang akan dibangun merupakan generalisasi dari sifat *Small Riemann Sum* yang sudah disebutkan sebelumnya. Dengan kata lain, sifat *Small Riemann Sum* pada integral Henstock dari fungsi bernilai real yang telah dilakukan peneliti yang disebutkan di atas merupakan kejadian khususnya.

Temuan yang ditargetkan dari penelitian yang akan dilakukan adalah:(a) terbangunnya konsep *Small Riemann Sum* pada integral Henstock di dalam ruang metrik kompak lokal dari fungsi bernilai vektor, (b) diperolehnya sifat-sifat *Small Riemann Sum* pada integral Henstock di dalam ruang metrik kompak lokal dari fungsi bernilai vektor.

Untuk mencapai tujuan tersebut dilakukan langkah-langkah berikut: pengumpulan literatur dari penelitian-penelitian sebelumnya yang terkait dengan teori integral dan sifat *Small Riemann Sum* yang terkait, menelaah sifat-sifat *Small Riemann Sum* yang ada, mengkaji sifat-sifat primitif fungsi terintegral Henstock di dalam ruang metrik kompak lokal dari fungsi bernilai vektor, membangun konsep *Small Riemann Sum* pada integral Henstock di dalam ruang metrik kompak lokal dari fungsi bernilai

Sampai saat ini sudah banyak ahli matematika yang mengembangkan teori integral, khususnya integral Henstock. Hal ini terbukti dari hasil penelitian tentang integral Henstock yang sudah dilakukan oleh Manuharawati (2002,2013), Manuharawati dan Yunianti (2013a), Indrati (2002), Henstock (1968), Lee dan Chew (1985, 1986), dan oleh Darmawijaya (1990, 2001). Dari integral Henstock untuk fungsi bernilai real telah dikaji juga tentang sifat *Small Riemann Sum*, yang antara lain dilakukan oleh Lee (1990), Lu dan Lee (1990 -1991), Schurle (1984), dan Darmawijaya (1995).

Berdasarkan hasil penelitian yang terkait dengan dua topik tersebut, yaitu sifat *Small Riemann Sum* untuk fungsi terintegral Henstock yang bernilai real dan, integral Henstock di dalam ruang metrik kompak lokal dari fungsi bernilai vektor, ada peluang untuk melakukan penelitian tentang sifat *Small Riemann Sum* pada terintegral Henstock di dalam ruang metrik kompak lokal dari fungsi bernilai vektor. Fungsi bernilai vektor dimaksudkan pada penelitian yang akan dilakukan adalah nilai fungsi dari fungsi terintegralnya adalah suatu vektor di ruang bernorma, khususnya ruang Banach. Oleh karena itu sifat *Small Riemann Sum* yang akan dibangun merupakan generalisasi dari sifat *Small Riemann Sum* yang sudah disebutkan sebelumnya. Dengan kata lain, sifat *Small Riemann Sum* pada integral Henstock dari fungsi bernilai real yang telah dilakukan peneliti yang disebutkan di atas merupakan kejadian khususnya.

Temuan yang ditargetkan dari penelitian yang akan dilakukan adalah: (a) terbangunnya konsep *Small Riemann Sum* pada integral Henstock di dalam ruang metrik kompak lokal dari fungsi bernilai vektor, (b) diperolehnya sifat-sifat *Small Riemann Sum* pada integral Henstock di dalam ruang metrik kompak lokal dari fungsi bernilai vektor.

Untuk mencapai tujuan tersebut dilakukan langkah-langkah berikut: pengumpulan literatur dari penelitian-penelitian sebelumnya yang terkait dengan teori integral dan sifat *Small Riemann Sum* yang terkait, menelaah sifat-sifat *Small Riemann Sum* yang ada, mengkaji sifat-sifat primitif fungsi terintegral Henstock di dalam ruang metrik kompak lokal dari fungsi bernilai vektor, membangun konsep fungsi terukur dari fungsi bernilai vektor, membangun konsep *Small Riemann Sum* pada integral Henstock di dalam ruang metrik kompak lokal dari fungsi bernilai vektor, mendiskusikan hasil temuan dengan para pakar atau membawa hasil temuan ke ajang seminar baik regional, nasional, maupun internasional.

Adapun hasil yang diperoleh sampai saat ini dan sudah dipresentasikan pada konferensi internasional di Universitas Negeri Yogyakarta dan Universitas Negeri Makasar adalah:

- (1) Mendefinisikan konsep kekontinuan dan kekontinuan mutlak kuat (relatif terhadap ukuran ϑ) dari fungsi interval yang bernilai vektor di dalam ruang metrik kompak lokal.
- (2) Membuktikan bahwa fungsi primitif dari fungsi bernilai vektor yang terintegral ϑ -Henstock pada sel E merupakan fungsi ϑ -kontinu mutlak kuat pada sel E .
- (3) Mendefinisikan konsep fungsi terukur- μ^* pada suatu himpunan terukur- μ^* dari fungsi bernilai vektor melalui kekonvergenan fungsi sederhana hampir di mana-mana pada himpunan yang terukur tersebut.
- (4) Membuktikan bahwa fungsi sederhana pada himpunan E adalah fungsi terukur- μ^* jika E merupakan himpunan terukur- μ^* .

- (5) Membuktikan bahwa suatu fungsi bernilai vektor yang terintegralkan ϑ –Henstock pada suatu sel di dalam ruang metrik kompak lokal merupakan fungsi terukur- μ^* pada sel tersebut

Rencana pada tahap berikutnya adalah: (i) Mendefinisikan konsep sifat *small Riemann sum* dari fungsi bernilai vektor di dalam ruang metrik kompak lokal, (ii) Membuktikan sifat-sifat yang terkait dengan fungsi yang telah didefinisikan pada (i)

PRAKATA

Puji syukur kami panjatkan kehadiran Allah S.W.T. yang atas rahmat dan hidayah-Nya kami dapat melakukan penelitian dengan judul “Sifat Small Riemann Sum dari Fungsi Bernilai Vektor Di Dalam Ruang Metrik Kompak Lokal”.

Dalam melakukan penelitian ini, peneliti mengucapkan terima kasih atas bantuan dan kemudahan yang peneliti peroleh, yang antara lain peneliti sampaikan kepada:

1. Yth Rektor Unesa dan Kepala LPPM Unesa, yang telah memberi kesempatan dan memberikan dana penelitian ini.
2. Yth. Prof. Dr. Mega Teguh Budiarto, yang telah memberi masukan untuk perbaikan proposal penelitian.
3. Yth. Prof. Dr. Soeparna Darmawijaya, yang telah meluangkan waktunya dalam mendiskusikan hasil penelitian dan memberikan arahan kepada peneliti dalam melakukan penelitian.
4. Panitia Internasional Conference On Research, Implementation And Education Of Mathematics And Sciences 2014, di Universitas Negeri Yogyakarta, yang telah memberi kesempatan peneliti untuk mempresentasikan sebagian hasil penelitian ini sehingga dapat masukan dan perbaikan untuk penyelesaian penelitian ini.
5. Panitia Internasional Conference On Mathematic, Sciences, Technology, Education And Their Applications 2014, di Universitas Negeri Makasar, kesempatan peneliti untuk mempresentasikan sebagian hasil penelitian ini sehingga dapat masukan dan perbaikan untuk penyelesaian penelitian ini.

Semoga semua amal baik yang telah diberikan kepada peneliti mendapat imbalan yang setimpal dari Allah S.W.T.

Surabaya, Desember 2014

Peneliti

DAFTAR ISI

HALAMAN SAMPUL	i
HALAMAN PENGESAHAN	ii
RINGKASAN	iii
PRAKATA	vi
DAFTAR ISI	1
DAFTAR DIAGRAM	
Diagram 4.1 Alur Penelitian	
BAB I PENDAHULUAN	3
1.1 Latar Belakang Masalah	3
1.2 Rumusan Masalah	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Ruang Metrik Kompak Lokal	5
2.2 Sistem Interval	6
2.3 Partisi Perron δ –fine	6
2.4 Integral Henstock Fungsi Bernilai Real	7
2.5 Ruang Bernorma	7
2.6 Ukuran dan Ukuran Luar	8
2.7 Integral Henstock Fungsi Bernilai Vektor	10
2.8 Liput Vitali	12
BAB III TUJUAN DAN MANFAAT PENELITIAN	14
3.1 Tujuan Penelitian	14
3.2 Manfaat Penelitian	14
BAB IV METODE PENELITIAN	16
4.1 Pendekatan Penelitian	16
4.2 Analisis Data	16
4.3 Alur Penelitian	16
4.4 Bahan dan Alat	17
BAB V HASIL YANG DICAPAI	18
5.1 Kekontinuan Mutlak Kuat Relatif Terhadap Fungsi Volum ϑ	18
5.2 Fungsi Sederhana	23

5.3 Fungsi Terukur— μ^*	24
BAB VI RENCANA TAHAP BERIKUTNYA	28
BAB VII KESIMPULAN DAN SARAN	29
DAFTAR PUSTAKA	30
LAMPIRAN	31
Lampiran 1: Artikel Ilmiah 1 (Dalam Conference Proceedings: Internasional Conference On Research, Implementation And Education Of Mathematics And Science, 2014)	
Lampiran 2: Artikel ilmiah 2 (Dalam Conference Proceedings: International Conference On Mathematics, Sciences, Tecnology, Education 2014)	53

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Penelitian yang telah menambah berkembangnya teori integral, khususnya yang terkait dengan integral Henstock, telah dilakukan oleh Manuharawati dan Yunianti (2013a), yaitu integral Henstock di dalam ruang metrik kompak lokal dari fungsi bernilai vektor. Penelitian yang dilakukan Manuharawati dan Yunianti ini merupakan pengitlakan dari penelitian yang telah dilakukan oleh Manuharawati (2002), yaitu pengitlakan di dalam range dari fungsinya. Hasil penelitian yang dilakukan Manuharawati pada tahun 2002 merupakan pengitlakan teori integral Henstock yang telah dilakukan oleh para pakar matematika sebelumnya, seperti yang dilakukan oleh Indrati (2002), Henstock (1968), Lee dan Chew (1985, 1986), Darmawijaya (1990, 2001), dan Cao (1992).

Hasil dari penelitian yang mereka lakukan hanya membahas fungsi yang bernilai real diperluas atau kalau tidak demikian domain fungsi yang dibahas merupakan interval tertutup dan terbatas (sel) pada $\mathbb{R}^n$. Sedang yang dilakukan Manuharawati domain fungsinya merupakan sel di dalam ruang metrik kompak lokal, yang merupakan abstraksi dari himpunan semua bilangan real berdimensi n ($\mathbb{R}^n$).

Hasil penelitian yang dilakukan oleh Manuharawati (2013) serta Manuharawati dan Yunianti (2013a, 2013b) masih membahas tentang sifat-sifat dasar dan bentuk deskriptif dari integral Henstock di dalam ruang metrik kompak lokal dari fungsi bernilai vektor. Sementara itu masih banyak sifat-sifat yang terkait dengan integral Henstock, misalnya tentang sifat fungsi primitifnya serta sifat *Small Reimann Sum* (SRS). Sifat SRS dari fungsi terintegral Henstock pada suatu sel di dalam $\mathbb{R}^n$ dan bernilai real telah banyak diteliti oleh pakar matematika yang antara lain oleh Lee (1990), Lu dan Lee (1990 -1991), Schurle (1984), dan Darmawijaya (1995).

Berpijak dari hasil penelitian yang pengusul lakukan sebelumnya (Manuharawati dan Yuniarti, 2013a, 2013b), dan dilandasi ide dari para pakar sebelumnya dalam penelitian yang terkait dengan sifat SRS tersebut, masih memungkinkan untuk mengadakan penelitian tentang sifat SRS dari suatu fungsi yang terintegral di dalam ruang metrik kompak lokal dengan fungsinya bernilai vektor.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian di atas, maka rumusan masalah yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah: “Bagaimanakah rumusan sifat *Small Riemann Sum* dari fungsi terintegral Henstock di dalam ruang metrik kompak lokal dengan fungsinya bernilai vektor?

Dari rumusan masalah tersebut, dapat diuraikan beberapa pertanyaan penelitian sebagai berikut:

1. Bagaimanakah definisi sifat *Small Riemann Sum* dari fungsi bernilai vektor yang terintegral Henstock di dalam ruang metrik kompak lokal?
2. Bagaimanakah sifat-sifat yang berlaku pada sifat *Small Riemann Sum* dari fungsi yang bernilai vektor dan terintegral Henstock di dalam ruang metrik kompak lokal?

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Ruang Metrik Kompak Lokal

Ruang metrik (X, d) dikatakan kompak lokal (*locally compact*) jika untuk setiap titik $p \in X$ mempunyai kitaran dengan *closure* yang kompak (Paty, 1993: 142).

Menurut Paty (Paty, 1993: 142), setiap ruang metrik kompak merupakan ruang metrik kompak lokal (Paty, 1993: 142), tetapi kebalikannya tidak berlaku, dalam arti bahwa setiap ruang metrik kompak lokal belum tentu merupakan ruang metrik kompak. Sebagai contoh ruang metrik usual $\mathbb{R}$, adalah ruang metrik kompak lokal, tetapi $\mathbb{R}$ terhadap metrik usual bukan ruang metrik kompak (Bartle and Sherbet, 2000: 321). Selanjutnya dapat dibuktikan bahwa: Ruang metrik (X, d) adalah kompak lokal jika dan hanya jika setiap $p \in X$ dan setiap kitaran V dari p terdapat kitaran W yang memuat p sehingga $cl(W)$ kompak dan $cl(W) \subset V$ (Paty, 1993: 143).

Dengan menggunakan pengertian bola terbuka dan persekitaran suatu titik, maka dari sifat di atas dapat dibuktikan juga bahwa: Jika (X, d) merupakan ruang metrik kompak lokal, maka untuk setiap $p \in X$ dan setiap bola terbuka $N(p, r)$ terdapat bola terbuka $N(p, l)$ dengan $cl(N(p, l))$ kompak dan $cl(N(p, l)) \subset N(p, r)$.

2.2 Sistem Interval

Untuk membangun integral Henstock, perlu adanya interval di dalam daerah asalfungsinya. Manuharawati (2002) telah membangun sistem interval di dalam ruang metrik kompak lokal yang merupakan abstraksi dari sistem interval pada $\mathbb{R}^n$ sebagai berikut.

Di dalam ruang metrik kompak lokal (X, d) . Koleksi $S \subset 2^X$ yang tidak kosong disebut **sistem interval** (*system of intervals*) jika memenuhi:

- (i) untuk setiap $p \in X$, $\{p\} \in S$,

- (ii) untuk setiap $p \in X$, jika $cl(N(p,r))$ kompak maka $N(p,r) \in S$,
- (iii) jika $A \in S$ maka A konveks, $cl(A)$ kompak, $cl(A) \in S$, dan $int(A) \in S$,
- (iv) untuk setiap $A, B \in S$, $A \cap B \in S$,
- (v) untuk setiap $A, B \in S$ terdapat $C_i \in S$, $1 \leq i \leq n$ dengan $\{C_i\}_{i=1}^n$ tidak tumpang tindih dan

$$A - B = \bigcup_{i=1}^n C_i .$$

Jika S merupakan sistem interval di dalam ruang metrik (X,d) , setiap anggota S disebut **interval**. Interval $A \in S$ dikatakan **degenerate** jika $int(A) = \emptyset$ dan **nondegenerate** jika $int(A) \neq \emptyset$.

Sel adalah interval kompak yang nondegenerate. Himpunan $A \subset X$ disebut **himpunan elementer** jika A dapat disajikan sebagai gabungan hingga interval-interval. Jadi A himpunan elementer jika dan hanya jika terdapat $C_i \in S$, $(1 \leq i \leq n)$ sehingga

$$A = \bigcup_{i=1}^n C_i .$$

Jika $E(X)$ menyatakan koleksi semua himpunan elementer yang termuat di dalam X , fungsi $volume \vartheta: E(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$ disebut **ukuran** pada $E(X)$ jika:

- (i) $\vartheta(A) = 0$ jika $int(A) = \emptyset$ dan $\vartheta(A) > 0$ jika $int(A) \neq \emptyset$,
- (ii) $\vartheta(A) \leq \vartheta(B)$ untuk setiap $A, B \in E(X)$ dengan $A \subset B$,
- (iii) $\vartheta(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \vartheta(A_i)$ untuk setiap barisan himpunan $\{A_i\} \subset E(X)$ yang tidak tumpang tindih dengan

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in E(X).$$

2.3. Partisi Perron δ -fine

Diberikan ruang metrik kompak lokal X , himpunan elementer kompak E dengan $int(E) \neq \emptyset$ dan fungsi $\delta: E \rightarrow \mathbb{R}^+$. Koleksi hingga pasangan sel-titik

$$P = \{(A_{x_i}, x_i), 1 \leq i \leq n\} = \{(A_x, x)\}$$

disebut **Partisi Perron δ -fine** pada E jika $x_i \in A_{x_i} \subset N(x_i, \delta(x_i))$ dan $\{A_{x_i}: i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ merupakan partisi pada E .

Jikadiberikan himpunan elementer kompak $E \subset X$ dengan $\text{int}(E) \neq \emptyset$, dan fungsi $\delta: E \rightarrow \mathbb{R}^+$, maka terdapat partisi Perron δ -fine pada E (Manuharawati, 2002: 18).

Lebih lanjut, jika fungsi $\delta_1: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ dengan $\delta_1(x) \leq \delta(x)$ untuk setiap $x \in E$, maka setiap partisi Perron δ_1 -fine pada E merupakan partisi Perron δ -fine pada E (Manuharawati, 2002: 19).

2.4. Integral Henstock Fungsi Bernilai Real

Untuk suatu bilangan asli n , fungsi $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^*$ dikatakan **terintegral- ϑ Henstock** pada sel $E \subset \mathbb{R}^n$ jika terdapat bilangan real α dengan sifat untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi $\delta: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ sehingga untuk setiap partisi Perron δ -fine

$$P = \{A_{x_1}, A_{x_2}, A_{x_3}, \dots, A_{x_n}; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\} = \{(A_x, x)\}$$

pada E berlaku

$$\left| \sum_{i=1}^n g(x_i) \vartheta(A_{x_i}) - \alpha \right| = \left| P \sum_{i=1}^n g(x) \vartheta(A_x) - \alpha \right| < \varepsilon$$

dengan $P \sum$ merupakan jumlahan atas partisi P .

Integral yang telah dibangun tersebut dan juga yang telah dibangun oleh para pakar sebelumnya (Indrati, 2002; Lee dan Chew, 1997), nilai dari fungsi yang terintegral berada pada himpunan semua bilangan real yang diperluas.

Berlandaskan penelitian yang telah disebutkan di atas, Manuharawati dan Yuniarti (2013a) telah melakukan pengitlakan integral tersebut, yaitu pada sel $[a, b]$ menjadi sel di dalam ruang metrik kompak lokal dan $\mathbb{R}^*$ menjadi ruang Banach serta nilai mutlak dengan *norm*. Dalam penelitian yang diusulkan, ruang fungsi yang pengusul gunakan adalah ruang fungsi terintegral Henstock yang telah dibangun oleh Manuharawati dan Yuniarti (2013a).

Selanjutnya dengan mengkaji sifat-sifat dari SRS yang telah dilakukan oleh peneliti terdahulu, seperti Manuharawati (2002); Indrati (2002); Lu dan Lee (1990 -1991), Schurle (1984), dan Darmawijaya (1995), akan diteliti sifat SRS dengan ruang fungsinya adalah fungsi terintegral Henstock di dalam ruang metrik kompak lokal yang bernilai vektor.

2.5 Ruang Bernorma

Pengertian ruang bernorma dalam penelitian ini diambil dari buku *Foundations of Topology* (Patty, 1993: 188) yang definisinya sebagai berikut.

Diberikan ruang vektor Y atas lapangan K . Suatu fungsi $\| \cdot \|$ dari ruang Vektor Y (atas lapangan K) ke $\mathbb{R}$ disebut norm pada Y jika untuk setiap $x, y \in Y$ dan setiap $\alpha \in K$ memenuhi:

- (i) $\|x\| \geq 0$,
- (ii) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = \mathbf{0}$, (iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Ruang vektor Y yang dilengkapi dengan norm $\| \cdot \|$ disebut ruang bernorm. Setiap anggota dari ruang vector, khususnya ruang bernorma disebut vektor.

Dari pengertian tersebut dapat dibuktikan sifat (Brown and Page, 1970: 85, 90). Jika $(Y, \| \cdot \|)$ ruang bernorma, maka untuk setiap $x, y \in Y$ berlaku:

- (i) $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = \mathbf{0}$
- (ii) $\|x - y\| \geq \| \|x\| - \|y\| \|$.

Selanjutnya jika $(Y, \| \cdot \|)$ ruang bernorma maka $d: Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $d(x, y) = \|x - y\|$, disebut metrik yang dibangkitkan oleh norm $\| \cdot \|$.

2.6 Ukuran dan Ukuran Luar

Ukuran yang digunakan dalam teori integral yang dikembangkan sebelumnya (yang disebutkan dalam latar belakang) adalah ukuran Lebesgue di dalam $\mathbb{R}$ maupun $\mathbb{R}^n$ sesuai dengan domain dimana integral tersebut didefinisikan.

Banyak tex book yang telah membahas ukuran Lebesgue di dalam $\mathbb{R}$ maupun $\mathbb{R}^n$, yang antara lain yang telah ditulis oleh.

Mengacu pada sifat-sifat ukuran Lebesgue yang telah dibahas oleh Jain dan Gupta (1987), Royden and Fitzpatrick(2010) dan sifat-sifat sistem interval pada ruang metrik kompak lokal, Manuharawati (2002) membangun fungsi volum pada koleksisemua himpunan elementer di dalam ruang metrik kompak lokal, yang merupakan abstraksi dari ukuran Lebesgue pada $\mathbb{R}$ maupun $\mathbb{R}^n$ sebagai berikut.

Definisi 2.1: Diberikan ruang metrik kompak lokal (X, d) . Jika $E(X)$ menyatakan koleksi semua himpunan elementer yang termuat di dalam X , fungsi *volume* $\vartheta: E(X) \rightarrow \mathbb{R}$ disebut **ukuran** pada $E(X)$ jika:

- (ii) $\vartheta(A) = 0$ jika $\text{int}(A) = \emptyset$ dan $\vartheta(A) > 0$ jika $\text{int}(A) \neq \emptyset$
- (iii) $\vartheta(A) \leq \vartheta(B)$ untuk setiap $A, B \in E(X)$ dengan $A \subset B$,
- (iv) $\vartheta(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \vartheta(A_i)$ untuk setiap himpunan $\{A_i\} \subset E(X)$ yang tidak tumpang tindih dengan $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in E(X)$.

Untuk interval A dan B yang gabungannya merupakan interval dengan A dan B tidak tumpang tindih, didefinisikan

$$\vartheta(A \cup B) = \vartheta(A) + \vartheta(B).$$

Dalam penelitian ini ruang metrik kompak lokal dibatasi pada ruang metrik nondiskret. Oleh karena itu $\text{int}(\{p\}) = \emptyset$. Akibatnya $\vartheta(\{p\}) = 0$.

Dari ukuran (fungsi volum) yang didefinisikan pada Definisi 2.1 dan mengacu pada ukuran luar Lebesgue, di dalam penelitian ini didefinisikan fungsi $\mu^*: 2^X \rightarrow \mathbb{R}^*$ yang disebut ukuran luar relatif terhadap ukuran ϑ sebagai berikut.

Definisi 2.2: Diberikan ruang metrik kompak lokal nondiskret (X, d) dan ukuran ϑ pada $E(X)$. Fungsi $\mu^*: 2^X \rightarrow \mathbb{R}^*$ yang didefinisikan sebagai

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \vartheta(A_i) : A_i \text{ interval terbuka}, A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right\}$$

disebut ukuran luar relatif terhadap ukuran ϑ (Manuharawati, 2002).

Sifat dari ukuran luar relatif terhadap ukuran ϑ adalah sebagai berikut.

Teorema 2.1 (Manuharawati, 2002: 21): Jika μ^* merupakan ukuran luar yang didefinisikan pada Definisi 2.2, maka berlaku:

- (i) $\mu^*(\emptyset) = 0$,
- (ii) $\mu^*(A) \geq 0$ untuk setiap $A \subset X$,
- (iii) $\mu^*(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu^*(A_i)$ untuk setiap barisan (A_i) di dalam X .

Himpunan $E \in X$ dikatakan terukur- μ^* (μ^* -measurable) jika untuk setiap $A \in X$ berlaku

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

Untuk setiap interval di dalam X merupakan himpunan terukur μ^* , dan koleksi semua himpunan terukur μ^* di dalam X merupakan σ -aljabar (algebra σ) pada X . Lebih lanjut jika

$$\{E_i: i = 1, 2, \dots, n\}$$

Merupakan koleksi berhingga yang tidak tumpang tindih dari himpunan terukur μ^* , maka untuk setiap $A \subset X$ berlaku

$$\mu^*[\cup_{i=1}^n (A \cap E_i)] = \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i).$$

(Manuharawati, 2002:22-23).

2.6 Integral ϑ –Henstock Dari Fungsi Bernilai Vektor

Selain beberapa definisi yang diuraikan sebelumnya, juga telah dibangun integral ϑ –Henstock pada ruang metrik kompak lokal yang daerah hasil dari fungsinya merupakan ruang bernorma beserta beberapa sifat di dalamnya (Manuharawati dan Yunianti: 2013) yang akan merupakan landasan untuk penelitian. Sifat-sifat yang terkait dengan penelitian tersebut adalah: keaditifan integralnya, Lemma Henstock, Sifat Cauchy, dan adanya fungsi primitif dari fungsi yang terintegral yang diuraikan sebagai berikut.

Definisi 2.3: Diberikan ruang metrik kompak lokal nondiskret X dan ruang Banach Y . Fungsi $g: X \rightarrow Y$ dikatakan **terintegral- ϑ Henstock** (Henstock ϑ -integrable) pada sel $E \subset X$ jika terdapat vektor $a \in Y$ dengan sifat untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi $\delta: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ sehingga untuk setiap partisi Perron δ -fine

$$P = \{(A_{x_i}, x_i), 1 \leq i \leq n\} = \{(A_x, x)\}$$

pada E berlaku

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=1}^n g(x_i) \vartheta(A_{x_i}) - a \right\| \\ &= \left\| P \sum g(x) \vartheta(A_x) - a \right\| < \varepsilon \end{aligned}$$

dengan $P\Sigma$ merupakan jumlahan atas partisi P . Jika $A \in S$ dengan $\vartheta(A) = 0$, maka integral- ϑ Henstock fungsi $g: X \rightarrow Y$ pada A didefinisikan sama dengan vektor nol (O). (Manuharawati and Yunianti, 2013: 20-21)

Himpunan semua fungsi yang terintegral- ϑ Henstock pada sel E dinotasikan dengan $H(E, \vartheta)$ dan vektor a pada Definisi 3.1 disebut nilai integral- ϑ dari fungsi f pada E dan dinotasikan dengan

$$(H - \vartheta) \int f = a.$$

Beberapa integral ϑ -Henstock dari fungsi bernilai vektor di dalam ruang metrik kompak lokal yang mendasari penelitian adalah sebagai berikut.

Teorema 2.2 (Kriteria Cauchy): Fungsi $g \in H(E, \vartheta)$ jika dan hanya jika untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi $\delta: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ sehingga untuk setiap partisi Perron δ -fine

$$P = \{(A_x, x)\} \text{ dan } Q = \{(B_y, y)\}$$

pada E berlaku

$$\|P \Sigma g(x) \vartheta(A_x) - Q \Sigma g(y) \vartheta(B_y)\| < \varepsilon.$$

(Manuharawati and Yunianti, 2013a: 71-75)

Teorema 2.3: Jika $g \in H(E, \vartheta)$, maka untuk setiap sel $F \subset E$, $g \in H(F, \vartheta)$. (Manuharawati and Yunianti, 2013: 24)

Teorema 2.4: Fungsi $g: X \rightarrow Y$ adalah terintegral- ϑ Henstock (Henstock ϑ -integrable) pada sel $E \subset X$ jika dan hanya jika terdapat fungsi aditif $G: I(E) \rightarrow Y$ dengan sifat untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi $\delta: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ sehingga untuk setiap partisi Perron δ -fine

$$P = \{(A_{x_i}, x_i), 1 \leq i \leq n\} = \{(A_x, x)\}$$

pada E berlaku

$$\|\Sigma_{i=1}^n g(x_i) \vartheta(A_{x_i}) - G(E)\| = \|P \Sigma g(x) \vartheta(A_x) - G(E)\| < \varepsilon.$$

Fungsi aditif G yang terdapat pada Teorema 5.6 tersebut disebut **primitif ϑ –Henstock dari fungsi g pada E** . (Manuharawati, 2013: 22-26)

Teorema 2.5. (Lemma Henstock): Jika fungsi $g: X \rightarrow Y$ terintegral- ϑ Henstock pada sel $E \subset X$ dengan fungsi primitif G , maka untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi $\delta: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ sehingga untuk setiap partisi Perron δ -fine $P = \{(A_x, x)\}$ dan sebarang $Q \subset P$ berlaku

$$\|Q \sum [g(x)\vartheta(A_x) - G(A_x)]\| < 2\varepsilon.$$

(Manuharawati, 2013: 22-26)

Teorema 2.6: Fungsi $g: X \rightarrow Y$ adalah terintegral- ϑ Henstock (Henstock ϑ -integrable) pada sel $E \subset X$ jika dan hanya jika terdapat fungsi aditif $G: I(E) \rightarrow Y$ dengan sifat untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi $\delta: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ sehingga untuk setiap partisi Perron δ -fine

$$P = \{(A_{x_i}, x_i), 1 \leq i \leq n\} = \{(A_x, x)\}$$

pada E berlaku

$$P \sum \|g(x)\vartheta(A_x) - G(A_x)\| < \varepsilon.$$

2.7 Liput Vitali (Vitali Cover)

Diberikan himpunan $E \subset X$. Koleksi $\mathcal{V}$ dari sel-sel $A \in S$, dengan $\vartheta(A) \neq 0$ disebut liput vitali (**vitali cover**) dari E jika untuk sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$ dan untuk setiap $x \in E$, terdapat interval $A \in \mathcal{V}$ sehingga $\vartheta(A) < \varepsilon$.

Teorema berikut menyatakan salah satu sifat liput vitali yang digunakan dalam pembahasan penelitian.

Teorema 2.6: (Vitali Covering Theorem) Diberikan himpunan $E \subset X$ dengan $\mu^*(E) < \infty$. Jika $\mathcal{V}$ merupakan liput vitali dari E , maka untuk sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$ koleksi hingga dari sel-sel yang tidak tumpang tindih

$$\{A_i: i = 1, 2, \dots, n\} \subset \mathcal{V}$$

sehingga

$$\mu^* \left(E - \bigcup_{i=1}^n A_i \right) < \varepsilon$$

(Manuharawati, 2002: 197-198)

BAB III

TUJUAN DAN MANFAAT PENELITIAN

3.1 Tujuan Penelitian

Dari pertanyaan penelitian yang telah diuraikan pada Bab 1, yaitu: (1) bagaimanakah definisi sifat *Small Riemann Sum* dari fungsi bernilai vektor yang terintegral Henstock di dalam ruang metrik kompak lokal? dan (2) bagaimanakah sifat-sifat yang berlaku pada sifat *Small Riemann Sum* dari fungsi yang bernilai vektor dan terintegral Henstock di dalam ruang metrik kompak lokal?, maka tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Membangun pengertian (definisi) sifat *Small Riemann Sum* dari fungsi bernilai vektor yang terintegral Henstock di dalam ruang metrik kompak lokal.
2. Mendeskripsikan sifat-sifat yang berlaku pada sifat *Small Riemann Sum* dari fungsi yang bernilai vektor dan terintegral Henstock di dalam ruang metrik kompak lokal.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan untuk pencapaian tujuan tersebut didahului oleh:

- (i) Membangun konsep (pengertian/definisi) kekontinuan dari fungsi interval pada ruang metrik kompak lokal dan bernilai vektor.
- (ii) Mendeskripsikan dan membuktikan sifat-sifat fungsi primitif dari fungsi bernilai vektor yang terintegral Henstock di dalam ruang metrik kompak lokal.
- (iii) Membangun konsep (pengertian/definisi) fungsi terukur dari fungsi bernilai vektor pada himpunan terukur di dalam ruang metrik kompak lokal.
- (iv) Membuktikan keterukuran fungsi bernilai vektor yang terintegral Henstock di dalam ruang metrik kompak lokal.

3.2 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Memberikan sumbangan pemikiran dalam rangka memperluas dan memperdalam wawasan tentang teori integral.
2. Memberikan ruang yang lebih luas bagi para pengguna integral, dalam arti bahwa hasil penelitian ini dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah yang lebih kompleks yang terkait dengan teori integral.

BAB IV

METODE PENELITIAN

4.1 Pendekatan Penelitian

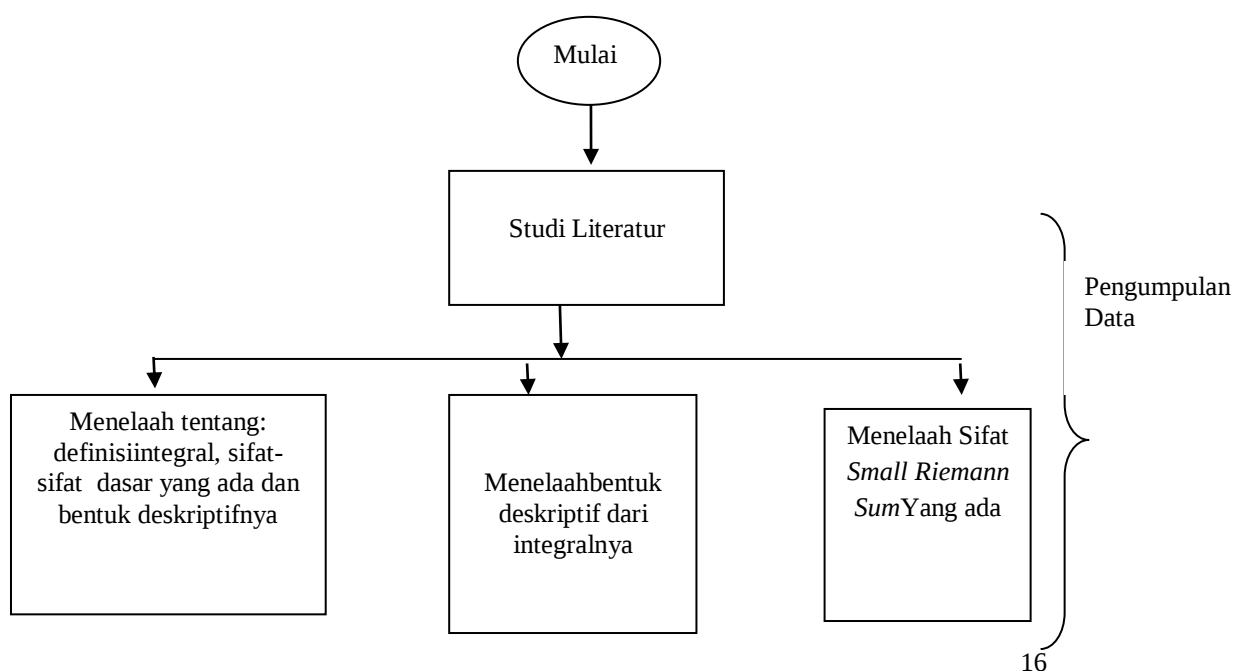
Penelitian ini dilakukan dengan pendekatan kualitatif. Sedang ditinjau dari jenisnya, penelitian ini merupakan penelitian eksploratif dan kajian pustaka, dalam arti pengumpulan datanya dilakukan dengan cara mengkaji (menelaah) teori-teori integral, khususnya integral jenis Riemann maupun yang terkait melalui textbook, jurnal, prosiding, atau internet.

4.2 Analisis Data

Dengan mengingat jenis penelitian ini merupakan penelitian eksploratif dan kajian pustaka, maka analisis data yang digunakan adalah mendeskripsikan hasil yang diperoleh melalui definisi, lemma, dan teorema. Untuk menguji kebenarannya dilakukan dengan mengkomunikasikan hasil kajian melalui diskusi dengan sejawat yang sebidang baik melalui seminar maupun mempublikasikannya lewat prosiding seminar ataupun majalah ilmiah.

4.3 Alur Penelitian

Alur penelitian yang dilakukan disajikan dalam Diagram 3.1 berikut.



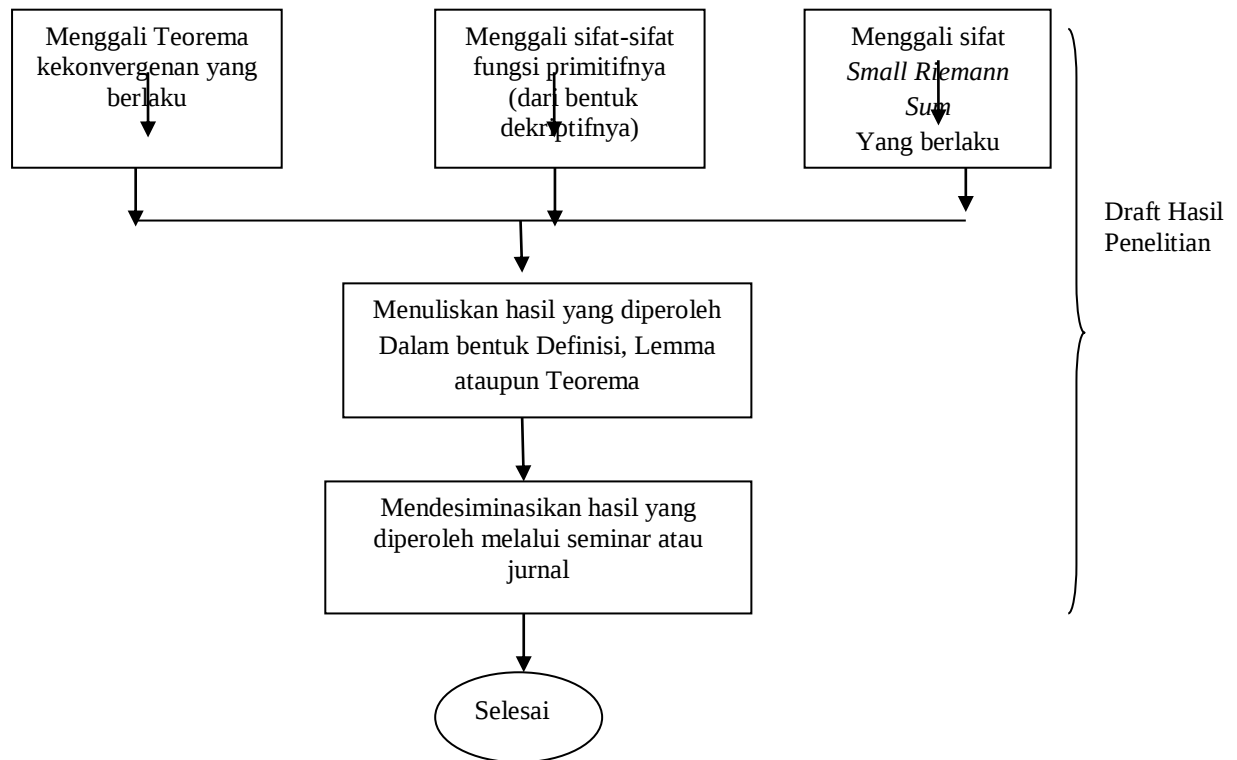


Diagram 4.1
Alur Penelitian

4.4 Bahan dan Alat

4.4.1. Bahan atau materi penelitian

Bahan atau materi penelitian yang digunakan adalah karya ilmiah, hasil penelitian para pakar matematika yang berupa jurnal, majalah, textbook, atau prosiding seminar.

4.4.2 Alat

Untuk melacak jurnal atau majalah mutakhir yang ada kaitannya dengan penelitian yang akan dilakukan dan untuk mendesiminasiikan hasil penelitian digunakan komputer dan printer.

BAB V HASIL YANG DICAPAI

Dalam bagian ini dideskripsikan hasil penelitian yang telah berhasil peneliti peroleh, antara lain yang telah diseminarkan pada “International Conference on Research, Implementation and Education of Mathematics and Science 2014” di Universitas Negeri Yogyakarta pada tanggal 18-21 Mei 2014 dan “International Conference On Mathematics Sciences, Technology Education and Their Applications” di Universitas Negeri Makasar pada tanggal 19-21 Agustus 2014.

Hasil yang diperoleh tersebut adalah kekontinuan mutlak kuat fungsi primitif dan keterukuran dari fungsi terintegral ϑ –Henstock yang bernilai vektor.

5.1 Kekontinuan Mutlak Relatif Terhadap Fungsi Volum ϑ

Diberikan ruang metrik kompak lokal nondiskret X , ruang Banach Y , fungsi volum pada $E(X)$ yaitu ϑ , suatu sel E pada X , dan himpunan semua interval yang termuat pada E , yaitu $I(E)$.

Definisi 5.1.1: Suatu fungsi $G: I(E) \rightarrow Y$ dikatakan kontinu- ϑ (v -continuous) di suatu interval $A \in I(E)$ jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan real $\gamma_A > 0$ sehingga untuk setiap $B, C \in I(E)$ dengan $A \subset B \subset C$, $v(A - B) < \gamma_A$, $v(C - A) < \gamma_A$ berlaku

$$\|G(A - B)\| < \varepsilon \text{ and } \|G(C - A)\| < \varepsilon.$$

Fungsi G dikatakan kontinu- v pada $I(E)$ jika G kontinu- ϑ di setiap interval $A \in I(E)$.

Lemma 5.1.2: Jika fungsi $G: I(E) \rightarrow Y$ merupakan fungsi kontinu- v dan additif pada $I(E)$ maka untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan real $\gamma > 0$ sehingga untuk setiap interval $A \in I(E)$ dengan $v(A) < \gamma$ berlaku

$$\|G(A)\| < \varepsilon.$$

Bukti: Diberikan sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$. Karena G kontinu- ν pada $I(E)$, maka G kontinu- ν di $\{x\}$ untuk setiap $x \in E$. Oleh karena itu untuk setiap $x \in E$ terdapat bilangan real $\gamma_x > 0$ sehingga untuk setiap interval terbuka $O_x \in I(E)$ dengan $x \in O_x$ dan $\vartheta(O_x) < \gamma_x$ berlaku

$$\|G(O_x)\| < \varepsilon.$$

Jika dibentuk koleksi himpunan

$$\mathcal{L}_1 = \{O_x \in I(E) : x \in \text{int}(E), x \in O_x, O_x \text{ terbuka, dan } \vartheta(O_x) < \gamma_x\}$$

$$\mathcal{L}_2 = \{B_x \in \mathcal{S} : x \in \partial(E), x \in B_x, B_x \text{ terbuka, dan } \vartheta(B_x \cap E) < \gamma_x\},$$

maka

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2.$$

merupakan liput vitali dari E . Karena E himpunan kompak, maka terdapat $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ sehingga

$$\{O_{x_i} \in \mathcal{L}_1 : 1 \leq i \leq l\} \cup \{O_{x_i} \in \mathcal{L}_1 : 1 \leq i \leq l\} \cup \{B_{x_i} \in \mathcal{L}_2 : 1 \leq i \leq m\}$$

dengan $l + m = n$ merupakan cover pada E .

Selanjutnya, diambil

$$\gamma = \min\{\gamma_{x_i} : 1 \leq i \leq n\}.$$

Karena G merupakan fungsi additif, maka untuk setiap interval $A \in I(E)$ dengan $\nu(A) < \gamma$ berlaku

$$\|G(A)\| < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Definisi 5.1.3: Fungsi $G : I(E) \rightarrow Y$ dikatakan kontinu- ϑ kuat (strongly absolutely ν -continuous) pada $F \subset E$ jika untuk sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan real $\gamma > 0$ sehingga untuk sebarang partisi $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ di E dengan $\partial(A_i) \cap F \neq \emptyset$ dan $\sum_{i=1}^n \vartheta(A_i) < \gamma$ berlaku

$$\sum_{i=1}^n \|G(A_i)\| < \varepsilon.$$

Teorema 5.1.4: Diberikan fungsi $g: X \rightarrow Y$. Jika $g \in H(E, \vartheta)$ dengan ϑ –Henstock primitif dari g pada E adalah G dan G adalah terbatas, maka G kontinu– ϑ kuat pada E .

Bukti: Karena g terbatas pada E , maka ada bilangan real $M > 0$ sehingga untuk setiap $x \in E$ berlaku

$$\|g(x)\| \leq M.$$

Diberikan sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$. Dengan menggunakan sifat kepadatan pada $\mathbb{R}$, maka terdapat bilangan real $\eta > 0$ sehingga $\eta < \frac{\varepsilon}{2M}$. Diambil sebarang koleksi $\{A_i, i = 1, 2, \dots, n\}$, $A_i \subset E$, dengan

$$\sum_{i=1}^n v(A_i) < \eta.$$

Karena $g \in H(E, \vartheta)$, maka menurut Lemma Henstock dan Teorema 2.3, terdapat fungsi $\delta: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ sehingga untuk sebarang partisi Perron δ –fine $P_i\{(A_x, x)\}$ pada A_i we have

$$\left\| P_i \sum [G(A_x) - g(x)v(A_x)] \right\| < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}.$$

Karena G adalah primitif ϑ –Henstock dari g pada E , maka menurut Teorema 2.3 untuk setiap i berlaku

$$\begin{aligned} \|G(A_i)\| &= \left\| P_i \sum G(A_x) \right\| \\ &\leq \|P_i \sum G(A_x) - g(x)v(A_x)\| + \|P_i \sum g(x)v(A_x)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} + M v(A_i). \end{aligned}$$

Oleh karena itu diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \|G(A_i)\| &< \sum_{i=1}^n \left[\frac{\varepsilon}{2^{i+1}} + M v(A_i) \right] \\ &< \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} + M \sum_{i=1}^n v(A_i) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa G merupakan fungsi kontinu– ϑ mutlak kuat pada E . ■

Teorema 5.1.5: Diberikan fungsi $g: X \rightarrow Y$. Jika $g \in H(E, \vartheta)$ dengan primitif ϑ –Henstock dari g pada E adalah G , maka G kontinu– ϑ pada $I(E)$.

Bukti: Diberikan sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$. Jika A adalah sel di dalam $I(E)$, maka terdapat himpunan terbuka O_A di X sehingga $A \subset O_A$ dan $\vartheta(O_A - A) < \varepsilon$. Jika $\mathcal{L}$ koleksi semua O_A dengan $A \subset O_A$ untuk semua $A \in I(E)$, maka $\mathcal{L}$ liput terbuka dari E . Karena E merupakan himpunan kompak, maka terdapat

$$\mathcal{M} = \{O_{A(i)}, i = 1, 2, \dots, n\} \subset \mathcal{L}$$

sehingga

$$E \subset \bigcup_{i=1}^n O_{A(i)}$$

Jika $F \in I(E)$, maka dengan menggunakan Lemma 5.1.2 dan keaditifan dari G , terdapat bilangan real $\gamma_F > 0$ sehingga jika $\vartheta(F) < \gamma_F$ berlaku

$$\|G(F)\| < \frac{\varepsilon}{n}.$$

Dibentuk

$$\gamma = \min\{\gamma_A : O_A \in \mathcal{M}\}.$$

Jika $B, C, D \in I(E)$ adalah sel dengan

$$B \subset C \subset D, \vartheta(C - B) < \gamma \text{ dan } \vartheta(D - C) < \gamma,$$

Maka terdapat koleksi hingga dari sel-sel yang tidak tumpang tindih

$$\{C_i : i = 1, 2, \dots, l\} \subset I(E) \text{ dan } \{D_i : i = 1, 2, \dots, s\} \subset I(E)$$

sehingga

$$cl(C - B) = \bigcup_{i=1}^l C_i \text{ dan } cl(D - C) = \bigcup_{i=1}^s D_i.$$

Karena $\vartheta(C - B) < \gamma$ dan $\vartheta(D - C) < \gamma$, maka untuk setiap i , $\vartheta(C_i) < \gamma$

dan $\vartheta(D_i) < \gamma$. Dengan menggunakan keaditifan fungsi G pada $I(E)$ diperoleh

$$\|G(C - B)\| = \sum_{i=1}^l \|G(C_i)\| < l \frac{\varepsilon}{n} \text{ dan } \|G(D - C)\| = \sum_{i=1}^s \|G(D_i)\| < s \frac{\varepsilon}{n}.$$

Jadi terbukti bahwa G kontinu– ϑ pada $I(E)$. ■

Sebelum membuktikan teorema berikut, dituliskan pengertian *shape* sebagai berikut.

Diberikan $A \in S$. *Shape* dari A didefinisikan sebagai

$$r(A) = \frac{\sup\{\vartheta(N(x,l)):x \in A; N(x,l) \subset A\}}{\inf\{\vartheta(N(x,l)):x \in A \subset N(x,l)\}}.$$

Selanjutnya, jika diberikan $E \in S, x \in E, \delta > 0, \rho > 0$, koleksi semua sel A dengan sifat $x \in A \subset N(x, \delta) \cap E$ dan $r(A) > \rho$, dinotasikan dengan $E(x, \delta, \rho)$.

Teorema 5.1.6: Diberikan fungsi $g: X \rightarrow Y$. Jika $g \in H(E, \vartheta)$ dengan primitif ϑ -Henstock dari g pada E adalah G , maka $D_v G(x)$ ada hampir di mana-mana pada E dan $D_v G(x) = g(x)$ hampir di mana-mana pada E .

Bukti: Diberikan sebarang bilangan real Given a real number $\varepsilon > 0$. Karena $g \in H(E, \vartheta)$ dengan primitif ϑ -Henstock dari g adalah G , maka menurut Lemma Henstock, terdapat fungsi $\delta: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ sehingga untuk setiap partisi Perron δ -fine $P = \{(A_x, x)\}$ pada E dan setiap partisi bagian P_0 dari P berlaku

$$P_0 \sum \|G(A_x) - g(x)v(A_x)\| < \varepsilon.$$

Jika

$$Z = \{x \in E: D_v G(x) \text{ exist or } D_v G(x) \text{ exist but } D_v G(x) \neq g(x)\},$$

Maka untuk setiap $x \in Z$ terdapat bilangan real $\eta(x) > 0$ dengan sifat: untuk setiap bilangan real $\gamma > 0$ terdapat $B_x \in E(x, \gamma, \eta(x))$ sehingga

$$\|G(B_x) - g(x)v(B_x)\| > \eta(x)v(B_x).$$

Untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, dibentuk

$$Z_k = \left\{x \in Z: \eta(x) > \frac{1}{k}\right\}.$$

Oleh karena itu

$$Z = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Z_k.$$

Jika

$$V = \{B_x: x \in Z_k, B_x \in E(x, \gamma, \eta(x)), \gamma < \delta(x)\},$$

maka V merupakan liput vitali untuk Y_k . Oleh karena itu terdapat koleksi dari sel-sel yang tidak tumpang tindih

$$\{B_{x_i}; i = 1, 2, \dots, p\} \subset V$$

sehingga

$$\mu^*(Y_k) \leq \sum_{i=1}^p v(B_{x_i}) + \varepsilon$$

$$< k \sum_{i=1}^p \|G(B_{x_i}) - g(x)v(B_{x_i})\| + \varepsilon$$

$$< k\varepsilon + \varepsilon.$$

Hal ini menunjukkan bahwa $\mu^*(Z_k) = 0$. Berdasarkan pembentukan himpunan Z berakibat $\mu^*(Z) = 0$ atau $D_v G(x)$ ada hampir di mana-mana pada E dan $D_v G(x) = g(x)$ hampir di mana-mana pada E . ■

Teorema 5.1.7: Diberikan fungsi $g: X \rightarrow Y$. Jika $g \in H(E, \vartheta)$ dengan primitif ϑ -Henstock dari g pada E adalah G , maka untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan real $\gamma > 0$ sehingga untuk setiap interval $A \in I(E)$ dengan $v(A) < \gamma$ berlaku

$$\|G(A)\| < \varepsilon.$$

Bukti: Karena G adalah primitif ϑ -Henstock dari g pada E , maka G merupakan fungsi additif pada $I(E)$. Dengan menggunakan Lemma 5.1.2. dan Theorem 5.1.5, maka untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan real $\gamma > 0$ sehingga untuk setiap interval $A \in I(E)$ dengan $v(A) < \gamma$ diperoleh

$$\|G(A)\| < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

5.2 Fungsi Sederhana (Simple Function)

Untuk membangun konsep keterukuran fungsi bernilai vektor, terlebih dahulu dibangun (didefinisikan) fungsi sederhana (*simple function*) yang bernilai vektor sebagai berikut.

Definisi 5.2.1: Diberikan $E \subset X$, θ vektor nol dari Y , dan e adalah vektor satuan (*unit element*) dari Y . Fungsi $\chi_E: X \rightarrow Y$ disebut fungsi karakteristik (***characteristic function***) pada E jika

$$\chi_E = \begin{cases} e & \text{if } x \in E \\ \theta & \text{if } x \notin E \end{cases}$$

Definition 5.2.2: Fungsi $s: X \rightarrow Y$ disebut fungsi sederhana (***simple function***) jika terdapat koleksi hingga dari himpunan-himpunan terukur μ^* yang saling asing

$\{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\}$ dan sebanyak hingga bilangan-bilangan real $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ sehingga

$$X = \bigcup_{i=1}^n X_i$$

dan

$$s(x) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{X_i}(x).$$

Jika untuk setiap i nilai c_i berbeda, maka rumus dari s tersebut disebut representasi canonic dari s .

5.3 Fungsi Terukur- μ^* (μ^* -measurable Function)

Melalui kekonvergenan barisan fungsi sederhana di dalam ruang bernorma dibangun (didefinisikan) konsep fungsi terukur relatif terhadap ukuran luar μ^* , yang selanjutnya akan digunakan dalam membangun sifat *small riemann sum*. Selanjutnya berhasil dibuktikan bahwa setiap fungsi karakteristik dan fungsi sederhana pada himpunan E masing-masing adalah terukur- μ^* pada E asalkan E merupakan himpunan terukur- μ^* dan fungsi bernilai vektor yang terintegral ϑ -Henstock pada suatu sel adalah terukur pada sel tersebut.

Definisi 5.3.1: Diberikan $E \subset X$. Jika E merupakan himpunan terukur- μ^* maka fungsi $g: X \rightarrow Y$ dikatakan terukur- μ^* pada E jika terdapat barisan fungsi sederhana (s_n) pada Y sehingga (s_n) konvergen ke g hampir di mana-mana pada E .

Teorema 5.3.2: Diberikan $E \subset X$. Jika E merupakan himpunan terukur- μ^* maka fungsi karakteristik $\chi_E: X \rightarrow Y$ merupakan fungsi terukur- μ^* pada E .

Bukti: Untuk setiap $x \in E$ barisan $(s_n(x)) = (\chi_E(x))$ merupakan barisan konstan pada Y . Oleh karena itu konvergen ke konstanta tersebut yaitu ke $\chi_E(x)$. Jadi barisan (s_n) konvergen ke χ_E pada E . Akibatnya (s_n) konvergen ke χ_E

hampir di mana-mana pada E . Karena E merupakan himpunan terukur- μ^* maka χ_E merupakan fungsi terukur- μ^* pada E . ■

Teorema 5.3.3: Diberikan $E \subset X$. Jika E merupakan himpunan terukur- μ^* maka fungsi sederhana $s: X \rightarrow Y$ merupakan fungsi terukur- μ^* pada E .

Bukti: Dengan menggunakan aljabar dari barisan yang konvergen, maka dengan menggunakan Teorema 5.3.2, $s: X \rightarrow Y$ merupakan fungsi terukur- μ^* pada E . ■

Teorema 5.3.4: Jika fungsi $g: X \rightarrow Y$ terintegral ϑ -Henstock pada sel $E \subset X$, maka g merupakan fungsi terukur- μ^* pada E .

Bukti: Misal G adalah primitif- ϑ dari g pada E dan ε adalah sebarang bilangan real dengan $\varepsilon > 0$. Berdasarkan Teorema 2.6, terdapat fungsi $\delta: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ sehingga untuk sebarang partisi Perron δ -fine $P = \{(A_x, x)\}$ pada E berlaku

$$P \sum \|g(x)\vartheta(A_x) - G(A_x)\| < \varepsilon \quad (1)$$

Untuk setiap bilangan asli n , dipilih partisi

$$P_n = \{A_{n_i} : i = 1, 2, 3, \dots, l_n\}$$

pada E , dengan $\text{diam}(A_{n_i}) < \frac{1}{n}$. Karena g terintegral ϑ -Henstock pada E , maka g terintegral ϑ -Henstock pada A_{n_i} . Selanjutnya dibentuk fungsi bernilai vektor $s_n: X \rightarrow Y$ sehingga

$$s_n(x) = \begin{cases} \frac{G(A_{n_i})}{\vartheta(A_{n_i})} & \text{if } x \in \text{int}(A_{n_i}) \\ \theta & \text{if } x \notin \text{int}(A_{n_i}) \end{cases} \quad (2)$$

Jelas bahwa untuk setiap bilangan asli n , s_n merupakan fungsi sederhana pada X .

Misalkan

$$A = \{x \in E : (s_n(x)) \text{ tidak konvergen ke } g(x)\}$$

dan

$$T = A - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\bigcup_{i=1}^{l_n} \partial(A_{n_i}) \right] \quad (3)$$

Karena $\mu^*(\partial(A_{n_i})) = 0$, maka cukup dibuktikan $\mu^*(T) = 0$. Dari Persamaan (3), untuk setiap $x \in T$ terdapat bilangan real $\gamma(x) > 0$ dan bilangan asli m sehingga

$$\|s_m(x) - g(x)\| \geq \gamma(x).$$

Jika untuk setiap bilangan asli k , didefinisikan

$$T_k = \left\{ x \in Y : \gamma(x) \geq \frac{1}{k} \right\},$$

maka diperoleh

$$T = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k.$$

Selanjutnya jika didefinisikan koleksi $\mathcal{V}$ sebagai berikut

$$\mathcal{V} = \{A_{n_i} : x \in \text{int}(A_{n_i}) \subset N(x, \delta(x)), i = 1, 2, \dots, l_n; n = 1, 2, \dots; x \in T_k\}.$$

maka $\mathcal{V}$ merupakan liput vitali dari T_k . Dengan menggunakan Teorema Liput Vitali, terdapat koleksi sebanyak hingga dari sel-sel

$$\{B_{x_j} : j = 1, 2, \dots, l\} \subset \mathcal{V}$$

sehingga

$$\mu^* \left(T_k - \bigcup_{j=1}^l B_{x_j} \right) < \varepsilon$$

atau

$$\begin{aligned} \mu^*(Y_k) &< \sum_{j=1}^l \vartheta(B_{x_j}) + \varepsilon \\ &< k \left[\sum_{j=1}^l \|G(B_{x_j}) - g(x_j)\vartheta(B_{x_j})\| \right] + \varepsilon \end{aligned}$$

$$< k\varepsilon + \varepsilon.$$

Jadi untuk setiap bilangan asli k , diperoleh

$$\mu^*(T_k) = 0.$$

Akibatnya $\mu^*(T) = 0$. Hal ini berarti bahwa (s_n) konvergen ke g hampir di mana-mana pada E . ■

Teorema 5.3.5: Diberikan dua fungsi $g, h: X \rightarrow Y$. Jika g terintegral ϑ -Henstock pada sel $E \subset X$ dan $h = g$ hampir di mana-mana pada E , maka g terukur- μ^* pada E .

Bukti: Misalkan

$$B = \{x \in E : h(x) \neq g(x)\}.$$

Karena $h = g$ hampir di mana-mana pada E , maka $\mu^*(B) = 0$. Jika T pada Persamaan (3) dan $U = T \cup B$, maka

$$\mu^*(U) \leq \mu^*(T) + \mu^*(B) \leq 0.$$

Karena $\mu^*(U) \geq 0$, maka $\mu^*(U) = 0$. Jadi terbukti bahwa g terukur- μ^* pada E . ■

BAB VI

RENCANA TAHAP BERIKUTNYA

Rencana pada tahap berikutnya adalah:

- (i) Mendefinisikan konsep sifat *small Riemann sum* dari fungsi bernilai vektor di dalam ruang metrik kompak lokal,
- (ii) (Membuktikan sifat-sifat yang terkait dengan fungsi yang telah didefinisikan pada (i)
- (iii) Mengkomunikasikan hasil dari (i) dan (ii) pada seminar atau pada jurnal.

BAB VII SIMPULAN DAN SARAN

7.1 Simpulan

Sampai bulan ini, secara ringkas hasil penelitian yang sudah diperoleh adalah sebagai berikut.

7.1.1 Suatu fungsi $G: I(E) \rightarrow Y$ dikatakan kontinu- ϑ (v -continuous) di suatu interval $A \in I(E)$ jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan real $\gamma_A > 0$ sehingga untuk setiap $B, C \in I(E)$ dengan $B \subset A \subset C$, $v(A - B) < \gamma_A$, $v(C - A) < \gamma_A$ berlaku

$$\|G(A - B)\| < \varepsilon \text{ and } \|G(C - A)\| < \varepsilon.$$

Fungsi G dikatakan kontinu- v pada $I(E)$ jika G kontinu- ϑ di setiap interval $A \in I(E)$.

7.1.2 Jika fungsi $G: I(E) \rightarrow Y$ merupakan fungsi kontinu- v dan aditif pada $I(E)$ maka untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan real $\gamma > 0$ sehingga untuk setiap interval $A \in I(E)$ dengan $v(A) < \gamma$ berlaku

$$\|G(A)\| < \varepsilon.$$

7.1.3 Diberikan fungsi $g: X \rightarrow Y$. Jika $g \in H(E, \vartheta)$ dengan ϑ -Henstock primitif dari g pada E adalah G dan G adalah terbatas, maka G kontinu- ϑ kuat pada E .

7.1.4 Diberikan fungsi $g: X \rightarrow Y$. Jika $g \in H(E, \vartheta)$ dengan ϑ -Henstock primitif dari g pada E adalah G dan G adalah terbatas, maka G kontinu- ϑ kuat pada E .

7.1.5 Diberikan fungsi $g: X \rightarrow Y$. Jika $g \in H(E, \vartheta)$ dengan primitif ϑ -Henstock dari g pada E adalah G , maka $D_v G(x)$ ada hampir di mana-mana pada E dan $D_v G(x) = g(x)$ hampir di mana-mana pada E .

7.1.6 Diberikan $E \subset X$, θ vektor nol dari Y , dan e adalah vektor satuan (*unit element*) dari Y . Fungsi $\chi_E: X \rightarrow Y$ disebut fungsi karakteristik (*characteristic function*) pada E jika

$$\chi_E = \begin{cases} e & \text{if } x \in E \\ \theta & \text{if } x \notin E \end{cases}$$

7.1.7 Fungsi $s: X \rightarrow Y$ disebut fungsi sederhana (**simple function**) jika terdapat koleksi hingga dari himpunan-himpunan terukur- μ^* yang saling asing $\{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\}$ dan sebanyak hingga bilangan-bilangan real $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ sehingga

$$X = \bigcup_{i=1}^n X_i$$

dan

$$s(x) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{X_i}(x).$$

7.1.8 Diberikan $E \subset X$. Jika E merupakan himpunan terukur- μ^* maka fungsi $g: X \rightarrow Y$ dikatakan terukur- μ^* pada E jika terdapat barisan fungsi sederhana (s_n) pada Y sehingga (s_n) konvergen ke g hampir di mana-mana pada E .

7.1.9 Diberikan $E \subset X$. Jika E merupakan himpunan terukur- μ^* maka fungsi karakteristik $\chi_E: X \rightarrow Y$ merupakan fungsi terukur- μ^* pada E .

7.1.10 Diberikan $E \subset X$. Jika E merupakan himpunan terukur- μ^* maka fungsi sederhana $s: X \rightarrow Y$ merupakan fungsi terukur- μ^* pada E .

7.1.11 Jika fungsi $g: X \rightarrow Y$ terintegral ϑ -Henstock pada sel $E \subset X$, maka g merupakan fungsi terukur- μ^* pada E .

7.1.12 Diberikan dua fungsi $g, h: X \rightarrow Y$. Jika g terintegral ϑ -Henstock pada sel $E \subset X$ dan $h = g$ hampir di mana-mana pada E , maka g terukur- μ^* pada E .

7.2 Saran (Masalah Terbuka)

Setelah terbangunnya fungsi terukur dan sifat *sifat small Riemann sum*, masih banyak masalah yang perlu dikaji lagi, antara lain adalah aplikasi sifat *small Riemann sum* baik dalam lingkup teori integral maupun dalam teori fungsi.

DAFTAR PUSTAKA

- Barttle, R.G., 2000, “*Intoduction to Real Analysis*“, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Brown, A.L. and Page, A., 1970, *Elements of Functional Analysis*, Van Nostrand Reinhold Company, New York.
- Cao,S.S., 1992, The Henstock Integral for Banach Valued Function, *SEA Bull. Math.*,16,1, 35 – 40.
- Darmawijaya, S., 1990, *A Fundamental Integral on the Real Line*, Proc. Asian Math Conf. 1990, 80-90, World Scientific Publishing Company, Singapore.
- Darmawijaya, S., 1992. *Selintas Sejarah Teori Integral*, Pidato Pengukuhan Guru Besar Dalam Ilmu MIPA, FMIPA UGM, Yogyakarta
- Darmawijaya, S., 1995. *Sum Small Rieman Sum Properties (Position of Lebesgue's in the Henstock integrable function)*, Research Report, FMIPA-UGM Yogyakarta.
- Darmawijaya, S., 2001, Darboux-MacShane and Darboux Henstock Integral, *Math Journal*, UGM, Yogyakarta.
- Henstock R., 1968, A Riemann-Type Integral of Lebesgue Power, *Canadian J. Math. Soc.* 20, 79 – 87.
- Heuser, H.,G., 1982, *Functional Analysis*, John Wiley & Sons: Chicher-New York.
- Indrati, R.Ch., 2002, Integral Henstock Kurzweil di Ruang Euclide Berdisertasiemensi-n, *Disertasi*, PPs UGM, Yogyakarta.
- Lee, P.Y and Chew, T.S., 1885, *A Better Cpnvergence Theorem for Henstock Integral*, *Bull.London Math.Soc.*,17, 557-568.
- Lee, P.Y and Chew, T.S., 1886, On Convergence Theorem for Nonabsolute Integrals, *Bull.Australian Math.Soc.*,34, 133-140.
- Lee T.Y., Lee, P.Y and Chew, T.S., 1997, On Henstock Integrability in Eucledian Space, *Real Analysis Exchange*.,22, 1, 382-389.

- Lu, S. P. And Lee, P. Y., 1990 – 1991. Globally Small Riemann Sum and The Henstock Integral, *Real Analysis Exchange*. 16, 2, 537 – 545.
- Manuharawati, 2002, Integral henstock di dalam Ruang Metrik Kompak Lokal, *Disertasi S3*, PPs-UGM, Yogyakarta.
- Manuharawati, 2013. Lemma Henstock Untuk Suatu Fungsi Bernilai Vektor Di Dalam Ruang Metrik Kompak Lokal. *Majalah Matematika dan Sains FMIPA Unesa*, Vol 3. 2013.
- Manuharawati dan Yunianti, D., 2013a. *Integral Henstock di dalam Ruang Metrik Kompak Lokal dari Fungsi Bernilai Vektor*. Laporan Penelitian, LPPM Unesa Surabaya, 2013.
- Manuharawati dan Yunianti, D., 2013b. *Kriteria Chauchy dari Suatu Fungsi bernilai Vektor Pada Sel di Dalam Ruang Metrik Kompak Lokal*. Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Aplikasinya, Unair, September 2013.
- Patty, C., W., 1993, *Foundation of Topology*, PWS Publishing Company, Boston.
- Schurle, A.W., 1984. *A Function is Perron Integrable It has Locally Small Riemann Sums*, Technical Report num. 66, UPM Mathematical Sciences.

Lampiran

Lampiran 1: Artikel 1

Lampiran 2: Artikel 2